**An application of the DINA model to a mathematics large scale assessment in México, with the usage of retrofitting techniques**

GDRR, JCPM, RVL, AFCDP

**Resumen**

Los modelos de diagnóstico cognitivo (CDM) son modelos psicométricos desarrollados para identificar con detalle las fortalezas y debilidades de los sustentantes evaluados a partir de la aplicación de una prueba, a lo largo del conjunto de conocimientos y habilidades cognitivas que conforman el dominio evaluado, permitiendo trazar perfiles individuales que orienten el desarrollo de acciones de mejora focalizadas en las áreas de oportunidad detectadas. En este trabajo se presenta la aplicación de una técnica de retrofitting con el modelo DINA (de la Torre, 2009) sobre los datos obtenidos en una evaluación estandarizada de Matemáticas aplicada a gran escala a estudiantes de educación básica en México: PLANEA (INEE, 2017). La matriz Q fue construida a partir de una revisión curricular y entrevistas cognitivas dirigidas a expertos y alumnos. El ajuste del modelo DINA a los datos mostró ser el mejor dentro de varios CDM evaluados. A partir de este trabajo, se pudo elaborar un diagnóstico cognitivo nacional, con importantes implicaciones educativas, empíricas y de apoyo pedagógico para la mejora en el aula.

Keywords: attribute mastery, cognitive diagnosis modeling, DINA model, mathematics, large scale assessment

**Introducción**

Una reciente y robusta línea de investigación en psicometría se ha enfocado en medir con precisión múltiples componentes del constructo latente de interés para obtener información más específica y detallada acerca del desempeño de los sustentantes y poder así brindar un diagnóstico cognitivo. De manera general, el objetivo de los distintos modelos de diagnóstico cognitivo es identificar el estado o grado de dominio que los sustentantes evaluados presentan a lo largo del conjunto de habilidades, conocimientos o atributos latentes requeridos por la prueba aplicada, para elaborar un perfil diagnóstico individual y granulado, que permita identificar las áreas de fortaleza y mejora de cada sustentante y poder así orientar el desarrollo de estrategias de mejora. En el ámbito educativo, la aplicación de estos modelos permite a padres de familia, docentes, directores y otros agentes educativos, tomar mejores decisiones con respecto al diseño, uso, manejo e implementación de recursos y materiales didácticos de apoyo hacia los estudiantes. Existe una amplia gama de modelos de diagnóstico cognitivo (CDM), para una revisión más extensa consultar se sugiere consultar a Cohen, (2019), Ferrara, Lai, Reilly, Nichols, Rupp y Leighton, (2017), o a van der Linden, (2016).

Los CDM pueden entenderse como modelos restringidos de clases latentes que modelan las respuestas observadas como una función de variables discretas latentes que reflejan el ejercicio de operaciones cognitivas subyacentes (Templin y Henson, 2006). En otras palabras, los CDM interpretan el desempeño de los participantes a través de un arreglo de atributos cognitivos binarios, a diferencia de los modelos derivados de la Teoría Clásica de los Test (TCT) o la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) que interpretan el desempeño de los sustentantes como reflejo de su posición a lo largo de un continuo que representa el dominio de la única variable o habilidad latente evaluada.

Para que una evaluación pueda ser considerada un diagnóstico cognitivo, el diseño de la misma debe considerar la integración de diversas teorías de aprendizaje, cognición y pedagogía con teorías de medición que permitan el desarrollo de evaluaciones que no se limiten a medir y evaluar, sino que sirvan como insumo para impulsar la mejora del aprendizaje de los estudiantes (Chudowsky y Pellegrino, 2003; Shepard, 2000).

La gran mayoría de los modelos de diagnóstico cognitivo requieren de la construcción de una matriz donde se identifique para cada ítem, cuáles son las habilidades u operaciones cognitivas que se consideran “necesarias” para obtener un acierto. El arreglo resultante es conocido en la literatura como matriz Q, y su construcción requiere del trabajo conjunto de expertos en el dominio evaluado, sustentantes que den cuenta de los procesos de respuesta evocados y de expertos en psicometría que corroboren que los atributos identificados como “requeridos” por cada ítem, hagan sentido a la luz de los aciertos y errores observados en la totalidad de la prueba, (referencias).

**Acerca de los Modelos de Diagnóstico Cognitivo**

Cada uno de los CDMs hace supuestos específicos sobre cómo el dominio de los distintos atributos es ponderado para producir una respuesta correcta o incorrecta en cada ítem. Una distinción importante tiene que ver con si el modelo es conjuntivo o disyuntivo (Rupp, Templin y Henson, 2010), los modelos conjuntivos asumen que se requiere el dominio de todos los atributos asociados al ítem para poder responder de manera exitosa, mientras que, los modelos disyuntivos asumen que la falta de dominio de un atributo puede ser compensada por el dominio de otros atributos, (por ejemplo, algunos CDM asumen que el dominio de los atributos tiene un efecto aditivo referencias).

Algunos de los CDMs más desarrollados y utilizados en la literatura son el modelo conjuntivo DINA (entrada determinística, ruidosa "y" puerta; Junker & Sijtsma, 2001; de la Torre, 2009) y su variante disyuntiva, el modelo DINO (entrada determinística, ruidosa "o" puerta; Templin y Henson, 2006), y el A-CDM (CDM aditivo; de la Torre, 2011). Según Rupp, Templin y Henson, (2010), otros CDM conocidos son el modelo NIDA (determinista de entrada ruidosa “y”; Junker y Sijtsma, 2001, Maris, 1999), el NIDO (determinista de entrada ruidosa o, Douglas, de la Torre, Chang, Henson & Templin, 2006), y el R-RUM (modelo unificado de reparación reducida; Hartz, 2002). Además, se han propuesto CDM generales que respetan los supuestos de modelos específicos (véase, por ejemplo, Henson, Templin & Willse, 2009; von Davier, 2005), o bien, que funcionan como modelos generales, como es el caso del modelo G-DINA (DINA generalizada; de la Torre, 2011), el modelo de diagnóstico cognitivo log-lineal (LCDM; Henson, Templin y Willse, 2009) y el modelo de diagnóstico general (GDM; von Davier , 2005).

**Acerca del Modelo DINA**

El modelo DINA constituye uno de los modelos más sencillos dentro de la familia de los CDMs (Junker y Sijtsma, 2001; de la Torre, 2009), cuenta con dos parámetros libres por ítem, que describen la probabilidad de que los aciertos o errores observados no se deban al grado de dominio que los sustentantes tienen sobre las habilidades requeridas. El parámetro de adivinación refiere a la probabilidad de obtener un acierto aún sin dominar las habilidades necesarias, (es decir, de “atinarle por por puro azar” a la respuesta correcta), y el parámetro de desliz captura la probabilidad de errar el ítem aún dominando las habilidades necesarias, (en otras palabras, de cometer un “desliz” al momento de seleccionar una respuesta).

El modelo DINA se expresa a partir de la siguiente ecuación,

De acuerdo con la Ecuación 1, el modelo DINA está compuesto por los siguientes elementos:

1.- Una variable binaria que indica si la persona obtuvo un acierto (1) o un error (0) en el ítem . Esto implica la existencia de una matriz Y compuesto por filas e columnas, donde se concentran los aciertos y errores obtenidos por cada persona en cada ítem.

2.- Un vector de valores binarios que para cada persona señala si se domina (1) o no (0) la operación cognitiva requerida por la prueba.

3.- Un vector que por cada ítem y para cada persona , contiene una variable binaria que señala la respuesta “esperada” (en términos de acierto o error) de acuerdo con el modelo propuesto por la matriz Q y lo que el arreglo nos dice sobre las habilidades dominadas por el participante . De esta forma, el vector queda plasmado como el elemento determinista del modelo, definido matemáticamente como:

4.- Un parámetro de desliz , que refleja la probabilidad de que aun cuando la respuesta esperada en el ítem sea 1 (porque se dominan todas las habilidades requeridas por el ítem, ), el participante cometa un “desliz” y se observe . Es decir,

)

5.- Un parámetro de adivinación , que representa la probabilidad de que aún si no se poseen todas las habilidades requeridas por el ítem , (), el participante “le atine” a la respuesta correcta (). Es decir,

En otras palabras, el modelo DINA establece que para cada ítem , los examinados que dominen todos los atributos requeridos tendrán una probabilidad de éxito igual a , mientras que los demás examinados tendrán una probabilidad de éxito igual a .

**Acerca de la Prueba de Matemáticas para Primaria (06) del PLANEA ELCE 2015**

La Prueba de Matemáticas para Primaria (06) con la que se trabajó en el presente proyecto, forma parte del Plan Nacional para las Evaluaciones de los Aprendizajes (PLANEA) diseñado y aplicado en 2015 en México por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), con la intención de contar con una evaluación a gran escala de la eficacia con la que el Sistema Educativo Nacional fomenta el dominio de los aprendizajes esperados de acuerdo al currículo nacional.

En especial, el PLANEA-ELCE toma los centros escolares como unidad de análisis (Evaluación del Logro de los Centros Escolares) y contempla la evaluación de campos formativos específicos (Matemáticas y Lenguaje y comunicación) tomando como variable de agrupación distintos factores (por ejemplo, región, estado, municipio, zona escolar, modalidad, tipo de organización, entre otros), (INEE, 2015).

**Método:**

La presente investigación tuvo como objetivo realizar, mediante la aplicación de técnicas de retrofitting, un diagnóstico cognitivo nacional para identificar el grado de dominio que los estudiantes de sexto año de primaria en México tienen a lo largo de las distintas habilidades básicas consideradas como parte de su currícula escolar. Para ello se trabajó con los datos obtenidos tras la aplicación a gran escala de la Prueba de Matemáticas para primaria (06) del PLANEA ELCE 2015, (con una muestra total de no. estudiantes de sexto de primaria). Una ventaja colateral de trabajar con esta prueba es que se trata de una disciplina ampliamente abordada desde el enfoque propuesto por los CDM (Brown y Burton, 1978; Chen y Macdonald, 2011; Gierl, Leighton, Changjiang, Jiawen, Rebecca & Tan, 2009; Ma, Çetin y Green, 2009; Pérez-Morán, 2014; Pérez-Morán, Contreras-Roldan, Hernández, Olivares, Chan, y Díaz, 2014; Pérez-Morán, Larrazolo, Backhoff, y Guaner, 2015; Revuelta y Ponsoda, 1998; Romero, Ponsoda y Ximénez, 2008).

Se realizaron estudios cognitivos donde participaron tanto expertos con experiencia en la enseñanza de las matemáticas a nivel primaria, como un grupo de estudiantes que brindó retroalimentación detallada y específica a cada ítem, para identificar los procesos de respuesta requeridos, mediante la realización de análisis cognitivo-reticulares y la aplicación de técnicas de pensamiento en voz alta concurrentes y retrospectivos, (Ericsson y Simon, 1984, 1993; Leighton, 2009; Leighton y Gierl, 2007).

Finalmente, se desarrolló un modelo cognitivo para dar cuenta de las habilidades, conocimientos y operaciones cognitivas involucradas en la resolución de cada ítem contenido la prueba. De esta forma, se construyó una matriz Q que sintetizara las relaciones existentes entre los ítems contenidos en la prueba y cada uno de los atributos u operaciones cognitivas identificadas en los estudios cognitivos, (Rupp, Templin, y Henson, 2010), con un total de 35 habilidades cognitivas agrupadas a lo largo de tres grandes ejes temáticos (Ver **Tabla 1**).

**Tabla 1**. Habilidades cognitivas evaluadas en la Prueba de Matemáticas para primaria (06) del PLANEA ELCE por eje temático

|  |  |
| --- | --- |
| Eje | Habilidades |
| 1 Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico | **SNPA01:** Comprensión de problemas matemáticos contextualizados  **SNPA02:** Comprensión del Sistema Internacional de Unidades (SIU)  **SNPA03:** Aplicación de operaciones aritméticas básicas  **SNPA04:** Representación del modelo aditivo de números fraccionarios  **SNPA05:** Amplificación de fracciones (Equivalencia de fracciones por amplificación)  **SNPA06:** Representación del modelo aritmético de la división  **SNPA07:** Representación de números fraccionarios  **SNPA08:** Inferencia del patrón que rige una secuencia de números naturales  **SNPA09:** Conversión de texto cardinal a números naturales y viceversa  **SNPA10:** Operación de valores posicionales con números naturales o decimales  **SNPA11:** Representación del modelo multiplicativo de números fraccionarios por naturales.  **SNPA12:** Conversión de una regla verbal de progresión geométrica de ascendente a una sucesión numérica  **SNPA13:** Deducción del patrón de una sucesión con progresión especial |
| 2 Manejo de la Información | **MI01:** Comprensión de problemas matemáticos contextualizados  **MI02:** Comparación de la proporcionalidad de razones  **MI03:** Representación de modelos aritméticos de la media (promedio)  **MI04:** Representación de modelos aritméticos de la mediana  **MI05:** Aplicación de operaciones aritméticas básicas  **MI06:** Representación de datos numéricos en gráficas de barras  **MI07:** Representación del modelo de regla de tres simple  **MI08:** Comprensión de la relación entre porcentajes y fracciones  **MI09:** Comparación de razones con cantidades discretas  **MI10:** Representación de un número fraccionario |
| 3 Forma, Espacio y Medida | **FEM01:** Comprensión de problemas matemáticos contextualizados  **FEM02:** Comprensión del Sistema Internacional de Unidades (SIU)  **FEM03:** Operación de valores posicionales con números naturales y decimales  **FEM04:** Ubicación de una coordenada en el primer cuadrante del plano cartesiano  **FEM05:** Aplicación de operaciones aritméticas básicas  **FEM06:** Definición de tecnicismos del lenguaje formal de la geometría  **FEM07:** Representación viso-espacial de figuras geométricas  **FEM08:** Identificación de las características geométricas de los cuadriláteros  **FEM09:** Identificación gráfica de tipos de líneas rectas (paralelas, perpendiculares y secantes)  **FEM10:** Representación del modelo aritmético para calcular el perímetro de una figura geométrica (triángulo o cuadrilátero)  **FEM11:** Representación del modelo aritmético para calcular el área de cuadriláteros o triángulos  **FEM12:** Deducción de fórmulas para calcular el área mediante descomposición de figuras geométricas |

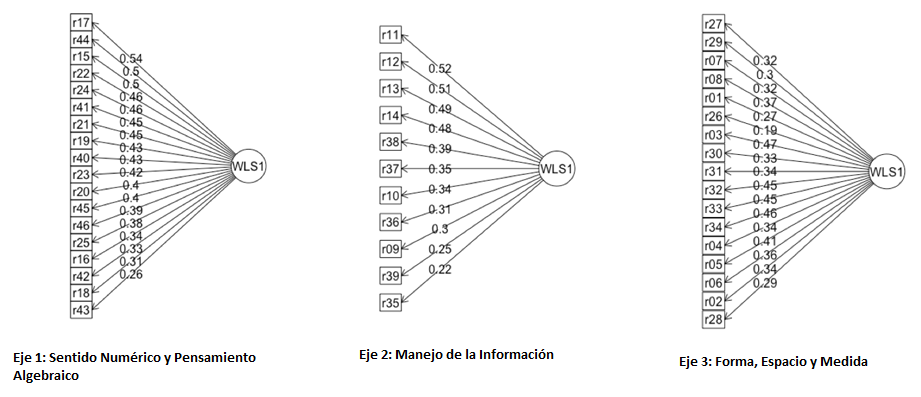
Se realizó un análisis de estructura interna a partir de la implementación de análisis factoriales exploratorios (AFE) y confirmatorios (AFC) con el método de estimación de mínimos cuadrados ponderados para variables categóricas, utilizando para ello una submuestra aleatoria de 5000 estudiantes. Se trabajó con la paquetería en R *nFactors* y *psych* de R (Ihaka, R. y Gentleman, R., 1996; Revelle, W., 20111, Raiche, G, Magis, D., Raiche, M. G., 2013). Los indicadores de ajuste absoluto que se emplearon fueron la raíz de los residuos cuadráticos promedios estandarizados (SRMR) y la raíz del error cuadrático promedio de aproximación (RMSEA), tomando como punto de corte valores inferiores a 0.05 para poder asumir un buen ajuste de los modelos factoriales (referencia).

Finalmente, se realizaron las estimaciones correspondientes al modelo DINA, utilizando la librería *CDM* en R, (Ihaka, R. y Gentleman, R., 1996; George, A., Robitzcsh, A., Kiefer, T., Gross, J. & Ünlü, A., 2016). Se computaron los parámetros de desliz y de adivinación de cada ítem y se estimó el grado de dominio de cada participante sobre las 35 habilidades evaluadas. El ajuste del modelo DINA a los datos recolectados en el PLANEA ELCE 2015 fue evaluado a partir de dos indicadores: el Criterio de Información Bayesiana (BIC) y el Criterio de Información Akaike (AIC).

Las estimaciones obtenidas permitieron trazar un vasto conjunto de perfiles diagnósticos segregados a nivel individual, centro escolar y estatal, mismos que fungieron como insumo principal para la publicación de un primer Diagnóstico Nacional de las habilidades básicas de Matemáticas en alumnos de sexto de primaria, (Pérez-Moran, Vázquez-Lira & Rojas, 2019).

Resultados

Al evaluar el ajuste de la estructura factorial propuesta por el modelo cognitivo elaborado mediante un Análisis Factorial, se encontraron valores del Standarized Root Mean Square Residual (SRMR) y del Root Mean Squared Error of Aproximation (RMSEA) inferiores a 0.05 para todos los ítems contenidos en cada eje temático. Esto sugiere que en cada eje existe un sólo factor dominante, por lo que se valida la calidad técnica del modelo cognitivo trazado. La Figura 3 presenta un diagrama que señala las cargas factoriales de cada uno de los ítems que componen cada uno de los tres ejes temáticos considerados.



*Figura 3.* Se presentan los diagramas correspondientes al análisis factorial realizado para cada uno de los ejes temáticos identificados como parte del modelo cognitivo de la Prueba de Matemáticas para Primaria (06) del PLANEA ELCE.

La Matriz Q que sintetiza la relación entre las operaciones cognitivas identificadas y los ítems que conforman la totalidad de la prueba se puede encontrar en los Apéndices.

Se utilizó el modelo DINA para analizar las respuestas registradas por los estudiantes que participaron en la aplicación del PLANEA ELCE y poder así obtener estimaciones individuales acerca de la probabilidad de dominio que cada participante tiene sobre cada operación cognitiva evaluada, así como para estimar el valor de los parámetros de desliz y adivinación para cada ítem.

En la **Tabla 7** se muestra nuestra primera aproximación a lo que sería un Diagnóstico Cognitivo nacional de las habilidades básicas en matemáticas para estudiantes de sexto año de primaria. Es decir, se presentan las probabilidades de dominio para cada una de las operaciones cognitivas estimadas para la muestra total. Como se puede observar, las probabilidades oscilan entre 0.49 y 0.68, valores que podrían considerarse “moderados” y que podrían estar sugiriendo la necesidad de elaborar e implementar planes de mejora orientados a promover el logro del aprendizaje.

**Tabla 7.** Probabilidades de dominio de las operaciones cognitivas por parte de los examinados en los tres ejes temáticos del PLANEA ELCE (06) 2015 de Matemáticas

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Eje** | **Operación cognitiva** | **Probabilidad de dominio** |
| I. Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico | SNPA01 | 0.58 |
| SNPA02 | 0.59 |
| SNPA03 | 0.65 |
| SNPA04 | 0.52 |
| SNPA05 | 0.57 |
| SNPA06 | 0.59 |
| SNPA07 | 0.65 |
| SNPA08 | 0.57 |
| SNPA09 | 0.51 |
| SNPA10 | 0.61 |
| SNPA11 | 0.63 |
| SNPA12 | 0.57 |
| SNPA13 | 0.50 |
| II. Manejo de la Información | MI01 | 0.68 |
| MI02 | 0.59 |
| MI03 | 0.65 |
| MI04 | 0.59 |
| MI05 | 0.68 |
| MI06 | 0.63 |
| MI07 | 0.63 |
| MI08 | 0.66 |
| MI09 | 0.49 |
| MI10 | 0.68 |
| III. Forma, Espacio y Medida | FEM01 | 0.60 |
| FEM02 | 0.63 |
| FEM03 | 0.63 |
| FEM04 | 0.51 |
| FEM05 | 0.67 |
| FEM06 | 0.50 |
| FEM07 | 0.57 |
| FEM08 | 0.57 |
| FEM09 | 0.59 |
| FEM10 | 0.61 |
| FEM11 | 0.68 |
| FEM12 | 0.57 |

En cuanto a la estimación de los parámetros de adivinación y desliz, el eje *Espacio, forma y medida*, presenta valores de adivinación de entre 0.08 a 0.61, con un promedio de 0.33. Tres de los N ítems que componen este eje presentan valores muy altos de adivinación, indicando que aún los examinados que no dominan las operaciones requeridas tienen una probabilidad mayor a 0.50 de “atinarle” a la respuesta correcta. Por su parte, el parámetro desliz presenta valores entre 0.01 y 0.79 con un valor promedio de 0.25. Nuevamente, tres ítems presentaron valores muy altos de desliz, indicando que aún los estudiantes que dominan las operaciones requeridas, tienen una baja probabilidad de responder correctamente el ítem.

En cuanto al eje *Manejo de información*, los parámetros de adivinación computados presentan valores en el rango de 0.18 a 0.45 con un valor promedio de 0.30. Los parámetros de desliz computado presentan valores entre cero y 0.48 con un valor promedio de 0.22.

Finalmente, el eje *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, presenta valores de adivinación que oscilan entre 0.13 y 0.56 con un promedio de 0.28 y valores Del parámetro desliz entre cero y 0.53 con un promedio de 0.25.

De acuerdo con estos indicadores, el modelo DINA demostró el modelo con el mejor ajuste dentro de los modelos CDM evaluados (DINO, evaluar más modelos).

**Devolución de resultados**

**Diseño de estrategias de mejora**

**Discusión**

**Conclusiones**

**Referencias**

* Brown, J. & Burton, R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.
* Chen, Y. & Macdonald, G. (2011). Validating Cognitive Sources of Mathematics Item Difficulty: Application of the LLTM to Fraction Conceptual Items. *Psychological Assessment*, *7*, 74–93.

Chudowsky, N., & Pellegrino, J. W. (2003). Large-scale assessments that support learning: What will it take?. *Theory into practice*, *42*(1), 75-83.

Cohen, Y. (2019). The Handbook of Cognition and Assessment; Frameworks, Methodologies, and Applications.

* De La Torre, J. (2009). DINA model and parameter estimation: A didactic. *Journal of educational and behavioral statistics*, *34*(1), 115-130

De La Torre, J. (2011). The generalized DINA model framework. *Psychometrika*, *76*(2), 179-199.

Douglas, J., de la Torre, J., Chang, H., Henson, R., & Templin, J. (2006, April). Skills diagnosis with latent variable models. In *annual meeting of the National Council on Measurement in Education, San Francisco, CA*.

* Ericsson, K. & Simon, H. (1984). *Protocol analisys: verbal reports as data*. Cambridge: MIT Press.
* Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data*. Cambridge, MA: MIT.

Ferrara, S., Lai, E., Reilly, A., Nichols, P. D., Rupp, A. A., & Leighton, J. P. (2017). Principled approaches to assessment design, development, and implementation. *The Handbook of Cognition and Assessment*, 41-74.

* Gierl, M., Leighton, J., Changjiang, W., Jiawen, Z., Rebecca, G. & Tan, A. (2009). *Validating Cognitive Models of Task Performance in Algebra on the SAT. Research Report 2009-3*. College Board, Research Report, 2009(3). New York.

George, A. C., Robitzsch, A., Kiefer, T., Groß, J., & Ünlü, A. (2016). The R package CDM for cognitive diagnosis models. *Journal of Statistical Software*, *74*(2), 1-24.

Henson, R. A., Templin, J. L., & Willse, J. T. (2009). Defining a family of cognitive diagnosis models using log-linear models with latent variables. *Psychometrika*, *74*(2), 191.

* INEE. (2015). Plan Nacional para la Evaluación de los aprendizajes (PLANEA). Resultados nacionales 2015. Recuperado de http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/planea/inal/fascículosinales/

resultadosPlanea-3011.pdf

Ihaka, R., & Gentleman, R. (1996). R: a language for data analysis and graphics. *Journal of computational and graphical statistics*, *5*(3), 299-314.

INEE (2017). Informe de resultados PLANEA 2015. El aprendizaje de los alumnos de sexto de primaria y tercero de secundaria en México. Lenguaje y Comunicación y Matemáticas. México: autor.

Junker, B. W., & Sijtsma, K. (2001). Cognitive assessment models with few assumptions, and connections with nonparametric item response theory. *Applied Psychological Measurement*, *25*(3), 258-272.

* Leighton, J. & Gierl, M. (2007). Defining and evaluating models of cognition used in educational measurement to make inferences about examinees’ thinking processes. *Educational Measurement: Issues and Practice, 26*(2), 3-16.
* Leighton, J. (2009). Two Types of Think Aloud Interviews for Educational Measurement: Protocol and Verbal Analysis Paper presented for symposium How to Build a Cognitive Model for Educational Assessments at the 2009 annual meeting of the National Council on Measurement in Education (NCME), April, 14-16.
* Ma, L. Çetin, E. y Green, K. (2009, April). *Cognitive assessment in Mathematics with the Least Squares Distance Method.* Artículo presentado en el Congreso anual de la AERA 2009. San Diego.

Maris, E. (1999). Estimating multiple classification latent class models. *Psychometrika*, *64*(2), 187-212.

* Pérez-Morán, J. C. (2014). *Análisis del aspecto sustantivo de la validez de constructo de una prueba de habilidades cuantitativas* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Baja California, Baja California, México.
* Pérez-Morán, J. C., Contreras, S., Hernández, E. M., Olivares, C., Chan, P., y Díaz, K. M. (2014). Análisis de las evidencias de validez basadas en el proceso de respuesta de las pruebas de ENLACE MS de Habilidad lectora y Matemáticas. Reporte técnico. México: INEE
* Pérez-Morán, J. C.; Larrazolo, N.; Backhoff, E.; y Guaner, R. (2015). Análisis de la estructura cognitiva del área de habilidades cuantitativas del EXHCOBA mediante el modelo LLTM de Fisher. Revista Internacional de Educación y Aprendizaje, 3(1), 25-38. <http://coleccionderevistasdeeducacionyaprendizaje.cgpublisher.com/product/pub.329/prod.5> ISSN 2255-453X
* Pérez-Morán, J. C.; Vázquez-Lira, R.; & Rojas, G. (2019). Diagnóstico Nacional de las habilidades básicas en Matemáticas de Sexto de Primaria: Resultados de 2015. México: RIMEDIE.

Raiche, G., Magis, D., & Raiche, M. G. (2010). Package ‘nFactors’. *Parallel Analysis and Non Graphical Solutions to the Cattell Scree Test. Available at CRAN repository: http://cran. r-project. org/web/packages/n Factors/n Factors. pdf*.

Revelle, W. (2011). An overview of the psych package. *Department of Psychology Northwestern University. Accessed on March*, *3*, 2012.

Revuelta, J. y Ponsoda, V. (1998). Un test adaptativo informatizado de análisis lógico basado en la generación automática de ítems. *Psicothema, 10*, 753-760.

Romero, S., Ponsoda, V., y Ximenez, C. (2008). Análisis de un test de aritmética mediante el modelo logístico lineal de rasgo latente 1. *Revista Latinoamericana de Psicología, 40*, 85–95.

Rupp, A. A., Templin, J., & Henson, R. A. (2010). Diagnostic assessment: Theory, methods, and applications. *New York: Guilford*.

Shepard, L. A. (2000). The role of assessment in a learning culture. *Educational researcher*, *29*(7), 4-14.

* Templin, J. L., & Henson, R. A. (2006). Measurement of psychological disorders using cognitive diagnosis models. *Psychological methods*, *11*(3), 287.

Templin, J., & Henson, R. A. (2006). A Bayesian method for incorporating uncertainty into Q-matrix estimation in skills assessment. In *Symposium conducted at the meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA*.

* Van der Linden, W. J. (Ed.). (2017). *Handbook of Item Response Theory, Volume Three: Applications*. CRC Press.

von Davier, M. (2005). A general diagnostic model applied to language testing data. *ETS Research Report Series*, *2005*(2), i-35.

**APÉNDICE.** Matriz Q (Extracto de la tabla original)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Código de ítem | **O1** | **O2** | **O3** | **O4** | **O5** | **O6** | **O7** | **O8** | **O9** | **O10** | **O11** | **O12** | **O13** |
| PMA05 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMB09 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMB07 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMA06 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMA04 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMA03 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMB06 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMB08 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| PMB05 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| PMA01 | **1** | **1** | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | **1** | 0 |
| PMB01 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| PMB04 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMA07 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMB02 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMA08 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMB03 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| PMA02 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |